UNIDADE

2

Capitalização composta

Objetivo

Nesta Unidade, você vai ser levado a: calcular o montante, taxas equivalentes, nominal e efetiva; relacionar os descontos compostos, bem como calcular o valor atual, o valor nominal e a taxa efetiva do desconto comercial; e enunciar e aplicar em problemas práticos a equivalência de capitais.

Capitalização composta

Caro estudante!

A Unidade 2 vai trazer os vários conceitos relacionados com a capitalização composta, tais como o cálculo do montante, a convenção linear e a exponencial, as taxas equivalentes, nominal e efetiva, os descontos compostos e a equivalência de capitais. Fique atento aos exemplos trazidos e não deixe de aplicar seus conhecimentos resolvendo as atividades propostas.

Cálculo do montante (*FV*)

Na capitalização composta ou regime de juros compostos, ao final de cada período os juros são capitalizados, e o montante constituído passa a render juros no período seguinte, ou ainda, é aquela em que a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial, acrescido do juro acumulado até o período anterior. Diz-se que os juros são "capitalizados", variando exponencialmente em função do tempo.

Portanto, o montante FV, resultante de uma aplicação do capital PV a uma taxa de juros compostos i (por período de capitalização) durante n períodos de capitalização, é dado por:

$$FV = PV(1 + i)^n$$

onde:

- a taxa de juros i está expressa na forma unitária; e
- o período de tempo n e a taxa de juros i devem estar na mesma unidade de tempo.

Os juros (J) obtidos no final de n períodos serão dados por:

$J = FV - PV \Rightarrow J = PV(1+i)^n - PV \Rightarrow$

$J = PV[(1+i)^n - 1]$.

A partir de agora, você vai acompanhar alguns exemplos. Nosso intuito é que você compreenda a resolução dos exercícios sobre o cálculo do montante, a taxa de juros, o valor presente e do prazo na capitalização composta, potencializando seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 2.1 Consideremos uma aplicação de R$ 10.000,00 a uma taxa de juros compostos de 10% *aa*, pelo prazo de quatro anos. Calcule o montante.

Resolução: dados do problema: PV = 10.000; i = 10% *aa* = 0,10 *aa*; n = 4 *anos*; FV = ?

Aplicando a fórmula do montante acima, vem:

$FV = PV(1+i)^n = 10.000\ (1+0,10)^4 \Rightarrow FV = 10.000\ (1,1)^4 \Rightarrow$

$FV = 14.641,00$

Portanto, o montante da aplicação é R$ 14.641,00.

Observação 2.1 A calculadora HP 12C determina diretamente o valor das quatro variáveis da fórmula $FV = PV(1+i)^n$, dado o valor das outras três. A calculadora HP 12C opera usando a idéia de fluxo de caixa, que você estudou na unidade anterior, e para isso utilizamos as suas funções financeiras (FV, PV, i, n), situadas na primeira linha da calculadora; devemos limpar as memórias digitando as teclas *f REG*.

Para resolver o exemplo acima na HP 12C, digite:

f REG 10000 *CHS PV* 10 *i* 4 *n FV*, aparecendo no visor 14.641,00.

Exemplo 2.2 O sr. Felisberto Silva, supervisor de serviços gerais da Comercial Topa Tudo, uma cadeia com nove lojas, está analisando a aquisição de nove máquinas de alta pressão para lavagem de pisos. O fabricante do equipamento, que detém a preferência do sr.

Felisberto, encaminhou-lhe um folheto técnico e um a oferta comercial. Cada equipamento tem um custo estimado de R$ 2.800,00, perfazendo um total de R$ 25.200,00. O pagamento está estipulado em 180 dias da entrega das máquinas. O sr. Felisberto quer saber qual seria o preço para pagamento contra-entrega, considerando um custo financeiro de 3,45% ao mês.

Resolução: dados do problema: $FV = 25.200$; $i = 3{,}45\%$ *am* = 0,0345 *am*; $n = 180$ *dias*; $PV = ?$

Da fórmula $FV = PV(1+i)^n$,vem $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$, assim:

$$PV = \frac{25.200}{(1+0{,}0345)^6} = \frac{25.200}{(1{,}0345)^6} = \frac{25.200}{1{,}225697} = 20.559{,}74.$$

Portanto, o preço para pagamento contra-entrega é R$ 20.559,74.

Para você resolver o exemplo acima na HP 12C, digite:

f *REG*
25200 *CHS* *FV*
3.45 *i*
6 *n*
PV, aparecendo no visor 20.559,74.

Exemplo 2.3 A Companhia Seguradora Sempre Viva dispõe de um tipo de seguro de vida resgatável ao final de determinado período. Uma das modalidades consiste em efetuar um pagamento único no início, que será remunerado com base em uma taxa anual de 8,2%. Determine o tempo estimado para uma pessoa que efetua um pagamento de R$ 120.000,00 e terá direito a um resgate de R$ 495.760,50 ao final.

Resolução: dados do problema: $FV = 495.760{,}50$; $PV = 120.000$; $i = 8{,}2\%$ *aa* = 0,082 *aa*; $n = ?$

Da fórmula $FV = PV(1+i)^n$, vem $n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1+i)}$, assim:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{495.760,50}{120.000}\right)}{\ln\left(1+0,082\right)} = \frac{1,4186}{0,0788} = 18.$$

Portanto, o tempo estimado é de 18 anos.

Para resolver o exemplo acima na HP 12C, você digita:

f	*REG*	
120000	*CHS*	*PV*
495760,50		*FV*
8,2		*i*

n, aparecendo no visor 18.

Exemplo 2.4. Calcular a taxa mensal de juros compostos de uma aplicação de R$ 4.000,00, que produz um montante de R$ 4.862,03 ao final de quatro meses.

Resolução: dados do problema: PV = 4.000; FV = 4.862,03; n = 4 *meses*; i = ?

Da fórmula $FV = PV(1+i)^n$, vem $i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$, assim:

$$i = \left(\frac{4.862,03}{4.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1,2155\right)^{0,25} - 1 = 1,050 - 1 = 0,050, \text{ou } i = 5\% \, am.$$

Portanto, a taxa da aplicação é 5% am.

Para resolver o exemplo acima na HP 12C, digite:

f	*REG*	
4000	*CHS*	*PV*
495760,50		*FV*
4862.03		*n*

i, aparecendo no visor 5.

Exemplo 2.5 Calcular o juro de um empréstimo de R$ 6.000,00 pelo prazo de 12 meses à taxa de juros compostos de 2,5% ao mês.

Resolução: dados do problema: PV = 6.000; n = 12 *meses*; i = 2,5% *am* = 0,025 *am*; J = ?

Aplicando diretamente a fórmula $J = PV[(1+i)^n - 1]$, vem:

$J = 6.000\,[(1+0,025)^{12} - 1] = 6.000\,[(1,025)^{12} - 1] =$

$J = 6.000\ [(1,3449 - 1] = 6.000 \times 0,3449 = 2.069,33$

Portanto, o juro do empréstimo é de R$ 2.069,33.

Para resolver este exemplo na HP 12C, você procede da seguinte maneira:

Digite:

f *REG*
2.5 *i*
12 *n*
6000 *CHS* *PV* *FV* 6000 –
e aparece no visor 2.069,33.

Em algumas operações financeiras, quando o prazo (ou período) não é um número inteiro em relação ao prazo definido para a taxa (período fracionário), usamos a convenção linear e a convenção exponencial para calcular o montante, taxa, juros, etc. É o que passaremos a estudar agora.

Convenção linear

A convenção linear admite a formação de juros compostos para a parte inteira do período e de juros simples para a parte fracionária.

O cálculo do montante *FV* na convenção linear é dado por:

$$FV = PV \times (1+i)^{n} \times \left[1 + i \times \left(\frac{p}{q}\right)\right],$$

onde:

$\frac{p}{q}$ é a parte fracionária do período.

Exemplo 2.6 Pedro Paulo fez uma aplicação de R$ 23.500,00 por dois anos e nove meses, à taxa de 18% *aa*. Calcular o montante recebido pela convenção linear.

Resolução: dados do problema: $PV = 23.500,00$; $i = 18\%$ *aa* = 0,18 *aa*; $n = 2$; $\frac{p}{q}$ (fração do ano) = $\frac{9}{12}$; $FV = ?$

Aplicando diretamente a fórmula acima, vem:

$$FV = 23.500 \times (1 + 0{,}18)^2 \left[1 + 0{,}18 \times \frac{9}{12}\right] =$$

$$FV = 23.500 \times (1{,}18)^2 \, [1 + 0{,}1350] = 23.500 \times 1{,}3924 \times 1{,}1350 = 37.138{,}79.$$

Portanto, Pedro Paulo recebeu R$ 37.138,79.

Convenção exponencial

A convenção exponencial adota o mesmo regime de capitalização para todo o período (tanto para a parte inteira como para a parte fracionária).

O cálculo do montante na convenção exponencial é dado por:

$$FV' = PV \times (1 + i)^{n + \frac{p}{q}}$$

onde:

$\frac{p}{q}$ é a parte fracionária do período.

Exemplo 2.7 Utilizando-se os dados do exemplo 2.6, calcular o montante pela convenção exponencial.

Resolução: dados do problema: $PV = 23.500{,}00$; $i = 18\%$ *aa* = 0,18 *aa*; $n = 2$; $\frac{p}{q}$ (fração do ano) = $\frac{9}{12}$; $FV = ?$

Aplicando diretamente a fórmula acima, você tem:

$$FV' = 23.500 \times (1 + 0{,}18)^{2 + \frac{9}{12}} =$$

$$FV' = 23.500 \times (1{,}18)^{2{,}75} = 23.500 \times 1{,}5764 = 37.046{,}18.$$

Portanto, Pedro Paulo recebeu R$ 37.046,18 pela convenção exponencial.

Observação 2.2 Existe uma diferença entre os montantes:

pela convenção linear = R$ 37.138,79;

pela convenção exponencial = R$ 37.046,18;

diferença = R$ 92,61.

Isto se deve à formação de juros simples no prazo fracionário da convenção linear.

Observação 2.3 Para resolver o exemplo 2.6 na HP 12C pela convenção linear, digite:

f *REG*
23500 *CHS* *PV*
18 *i*
2 *ENTER* 9 *ENTER* 12 ÷ *n*
FV, aparecendo no visor 37.138,79.

Para resolver o exemplo 2.7 na HP 12C pela convenção exponencial, com os dados que você já tem na calculadora, digite *STO EXX* e, a seguir, pressione duas vezes a tecla *FV*, aparecendo no visor 37.046,18.

Vamos verificar se você entendeu nossa explanação! Faça as atividades propostas e, caso tenha ficado com dúvidas, retome a leitura dos conceitos ainda não entendidos e consulte seu tutor.

Atividades de aprendizagem – 1

1) Uma pessoa aplicou a uma taxa de juros de 1,25% *am* e recebeu R$ 1.850,00 de rendimentos de sua aplicação. Qual o montante que resgatou após 15 meses?

2) Certa loja vende um bem, à vista, por R$ 22.000,00. Caso o cliente opte por pagar em uma única parcela após certo período de tempo, a loja exige R$ 6.161,859 como juros. Calcular o prazo de financiamento, sabendo-se que a taxa de juros da loja é de 2,5% *am*.

3) O capital de R$ 7.000,00 foi aplicado durante 116 dias a uma taxa anual de 12%. Calcular o montante pela convenção linear e pela convenção exponencial.

4) Uma pessoa investiu R$ 4.000,00 à taxa de 15% *aa* e, após certo tempo recebeu o montante de R$ 7.850,24. Quanto tempo o capital ficou aplicado?

5) Quanto deve ser aplicado hoje para que se tenha R$ 2.450,00 de juros ao fim de dois anos e seis meses, se a taxa de aplicação for de 3% ao trimestre?

6) Determinar a taxa de juros mensal recebida por um investidor que aplica R$ 2.500,00 e resgata R$ 2.739,09 ao final de nove meses.

7) Um investidor aplicou R$ 8.000,00 em uma instituição financeira que paga 1,2% *am*. Após certo período de tempo, ele recebeu R$ 9.916,06, estando neste valor incluídos os juros creditados e o capital investido. Calcular o tempo que ficou aplicado o dinheiro.

A partir deste momento, vamos estudar um dos conceitos mais importantes da Matemática Financeira e de enorme aplicação no mercado financeiro nacional: taxas equivalentes.

Taxas equivalentes

Dizemos que duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital e durante o mesmo prazo de aplicação, produzirem **montantes iguais**.

As taxas $i_1 = 2,5\%$ *am* e $i_2 = 34,488882\%$ *aa* são equivalentes, pois, se aplicadas ao mesmo capital de R$ 1.500,00, pelo prazo de dois anos, produzem montantes iguais.

De fato, calculando o montante para a primeira taxa, você tem:

$FV = PV(1+i)^n = 1.500 \times (1,025)^{24} = 1.500 \times 1,8087 = 2.713,05.$

Para a segunda taxa, vem:

$FV = PV(1+i)^n = 1.500 \times (1,34488882)^2 = 1.500 \times 1,8087 = 2.713,05.$

O cálculo da taxa equivalente i_{eq} é dado pela fórmula:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$$

onde:

i = taxa conhecida;

nd = período da taxa desconhecida; e

nc = período da taxa conhecida.

Exemplo 2.8 Calcular a taxa anual equivalente a 2,5% *am*.

Resolução: dados do problema: i = 2,5% *am* = 0,025 *am*; nc = 1 mês; nd = 1 ano = 12 meses

Aplicando a fórmula acima, vem:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 \Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}025)^{\frac{12}{1}} - 1 =$$

$$i_{eq} = (1+0{,}025)^{12} - 1 = (1{,}025)^{12} - 1 = 0{,}3449 \text{ x } 100 = 34{,}49\%.$$

Portanto, a taxa anual equivalente é 34,49%.

Exemplo 2.9 Calcular a taxa mensal equivalente a 48% *aa*.

Resolução: dados do problema: i = 48% *aa*; nc = 1 ano = 12 meses; nd = 1 mês

Aplicando a fórmula acima, vem:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 \Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}48)^{\frac{1}{12}} - 1 =$$

$$i_{eq} = (1+0{,}48)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1{,}48)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0332 \text{ x } 100 = 3{,}32\%.$$

Portanto, a taxa equivalente mensal é 3,32%.

Exemplo 2.10 Determinar a taxa semestral equivalente a 4,5% *at*.

Resolução: dados do problema: i = 4,5% *at* = 0,045 *at*; nc = 1 trimestre; nd = 1 semestre = 2 trimestres. Aplicando a fórmula acima, vem:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 \Rightarrow i_{eq} = (1+0{,}045)^{\frac{2}{1}} - 1 =$$

$$i_{eq} = (1 + 0{,}045)^2 - 1 = (1{,}045)^2 - 1 = 0{,}0920 \times 100 = 9{,}20\%.$$

Portanto, a taxa equivalente semestral é 9,20%.

Exemplo 2.11 Determinar a taxa equivalente a 38% *aa* pelo prazo de 57 dias.

Resolução: dados do problema: i = 3,8% *aa* = 0,38 *aa*; nc = 1 ano = 360 dias; nd = 57 dias.

Aplicando a fórmula acima, temos:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 \Rightarrow i_{eq} = (1+0,38)^{\frac{57}{360}} - 1 =$$

$$i_{eq} = (1,38)^{\frac{57}{360}} - 1 = 0,0523 \times 100 = 5,23\%.$$

Portanto, a taxa equivalente pelo prazo de 57 dias é 5,23%, ou seja, 5,23% *ap* (ao período).

Exemplo 2.12 Determinar a taxa para 214 dias equivalente a 18% *as*.

Resolução: dados do problema: i = 18% *as* = 0,18 *as*; nc = 1 sem = 180 dias; nd = 214 dias.

Pela fórmula acima, vem:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1+0,18)^{\frac{214}{180}} - 1 =$$

$$i_{eq} = (1,18)^{\frac{214}{180}} - 1 = 1,2174 - 1 = 0,2174 = 0,2174 \times 100 = 21,74\%.$$

Portanto, a taxa equivalente pelo prazo de 214 dias é 21,74%, ou 21,74% *ap*.

Exemplo 2.13 Calcular a taxa trimestral equivalente a 34,75% em um ano e seis meses.

Resolução: dados do problema: i = 34,75% em um ano e seis meses = 6 trimestres; nc = 6 trimestres; nd = 1 trimestre.

Usando a fórmula acima, vem:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1+0,3475)^{\frac{1}{6}} - 1 =$$

$$i_{eq} = (1,3475)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1,0509 = 0,0509 = 0,0509 \times 100 = 5,09\%.$$

Portanto, a taxa equivalente trimestral é 5,09%.

Exemplo 2.14 O sr. Epaminondas aplicou R$ 4.500,00, à taxa de 23% *aa* pelo prazo de um ano e sete meses. Calcular o valor de resgate dessa aplicação.

Resolução: dados do problema: PV = 4.500; i = 23% *aa* = 0,23 *aa*; n = 1 ano e 7 meses = 19 meses; FV = ?

Vamos inicialmente calcular a taxa equivalente ao período da aplicação, ou seja:

$$i_{eq} = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 = (1+0{,}23)^{\frac{1}{12}} - 1 =$$

$i_{eq} = (1{,}23)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0174 \times 100 = 1{,}74\%$, assim, $i = 1{,}74\%$ *am*.

Agora, pela fórmula do montante, vem:

$FV = PV(1+i)^n = 4.500 \times (1+0{,}0174)^{19} = 4.500 \times (1{,}0174)^{19} =$ $4.500 \times 1{,}3879 = 6.245{,}55$, ou ainda:

$$FV = PV(1+i)^n = 4.500 \times (1+0{,}23)^{\frac{19}{12}} = 4.500 \times (1{,}23)^{\frac{19}{12}} =$$

$= 4.500 \times 1{,}3879 = 6.245{,}55$.

Portanto, o sr. Epaminondas resgatou R$ 6.245,55.

Taxa nominal e taxa efetiva

Para que uma taxa de juros seja considerada **efetiva**, é necessário que o período ao qual se refere coincida com o período de capitalização, caso contrário, a taxa será dita **nominal**. A taxa nominal geralmente é fornecida em termos anuais, e o período de capitalização pode ser diário, mensal, trimestral, semestral, bimestral, quadrimestral e anual.

Alguns exemplos de taxa nominal:

- 24% *aa* com capitalização trimestral;
- 48% *aa* com capitalização mensal;
- 9,5% *as* com capitalização trimestral;
- 4,5% *at* com capitalização mensal; e
- 3% *am* com capitalização diária.

O cálculo da taxa efetiva é obtido pela fórmula:

$$i_f = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1,$$ onde:

i = taxa nominal de juros; e

k = número de capitalizações para um período da taxa nominal.

Exemplo 2.15 Calcular a taxa efetiva anual equivalente a 24% *aa* com capitalização trimestral.

Resolução: dados do problema: i = 24% *aa* = 0,24 *aa* ; k = 4 e i_f = ? Aplicando a fórmula acima, vem:

$$i_f = \left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1 \Rightarrow i_f = \left(1+\frac{0{,}24}{4}\right)^4 - 1 = (1{,}06)^4 - 1 = 0{,}2624 = 26{,}24\%.$$

Portanto, a taxa efetiva equivalente é 26,24% *aa*.

Exemplo 2.16 Determinar a taxa nominal com capitalização mensal, da qual resultou a taxa efetiva de 39,75% *aa*.

Resolução: dados do problema: i_f = 39,75% *aa* = 0,3975 *aa*; k = 12 e i = ? Pela fórmula acima, você tem:

$$i_f = \left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1 \Rightarrow 0{,}3975 = \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} - 1 \Rightarrow 1{,}3975 = \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} \Rightarrow.$$

$$(1{,}3975)^{\frac{1}{12}} = \left(\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}\right)^{\frac{1}{12}} \Rightarrow 1{,}0283 = 1+\frac{i}{12} \Rightarrow i = 12[1{,}0283-1] = 0{,}3394$$

Portanto, a taxa nominal é 33,94% *aa*.

Exemplo 2.17 Qual a taxa efetiva mensal equivalente a 25,75% *aa* com capitalização semestral?

Resolução: dados do problema: i = 25,75% *aa* = 0,2575 *aa*; k = 2 e i_m = ?. Aplicando a fórmula da taxa efetiva, temos:

$$i_f = \left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1 \Rightarrow i_f = \left(1+\frac{0{,}2575}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}2741 = 27{,}41\%,$$

ou seja, a taxa efetiva é 27,41% *aa*.

Vamos calcular a taxa equivalente mensal. Aplicando a fórmula de taxa equivalente $i_{eq} = i_m = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1$, você tem:

$$i_m = (1+i)^{\frac{nd}{nc}} - 1 \Rightarrow i_m = (1+0{,}2740)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0204 = 2{,}04\%.$$

Resposta: portanto, a taxa efetiva mensal equivalente a 25,75% *aa* com capitalização semestral é 2,04%.

Observação 2.4 A taxa efetiva mensal equivalente a 25,75% *aa* com capitalização semestral pode ser calculada diretamente usando os seguintes cálculos:

$$i_m = \left(\left(1+\frac{0{,}2575}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1{,}1288)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0{,}204 = 2{,}04\%.$$

Exemplo 2.18 Qual a taxa efetiva trimestral equivalente a 41,5% *aa* com capitalização mensal?

Resolução: dados do problema: $i = 41{,}5\%$ *aa* = 0,415 *aa*; $k = 12$ e i_t = ?. Aplicando o procedimento da observação 2.4 acima, você tem:

$$i_t = \left(\left(1+\frac{0{,}415}{12}\right)^{12}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1{,}0346)^3 - 1 = 0{,}1074 = 10{,}74\%,$$ ou

ainda, você divide 41,5% *aa* por doze meses obtendo 3,4583% *am*, agora você determina a taxa trimestral equivalente à taxa mensal acima, logo:

$i_t = (1{,}0346)^3 - 1 = 0{,}1074 = 10{,}74\%.$

Portanto, a taxa efetiva é 10,74% *at*.

Exemplo 2.19 Determinar o montante, ao final de dois anos, de um capital de R$ 5.500,00 aplicado a 21% *aa* capitalizados trimestralmente.

Resolução: dados do problema: PV = 5.500,00; i = 21% *aa* = 0,21 *aa* ; $k = 4$; $n = 2$; FV = ?

Inicialmente, você calcula a taxa efetiva anual equivalente à taxa dada; aplicando a fórmula da taxa efetiva, temos:

$$i_f = \left(1+\frac{0{,}21}{4}\right)^4 - 1.$$

O montante é dado por:

$$FV = PV(1+i)^n = PV(1+i_f)^2 \Rightarrow FV = 5.500\left[1+\left(1+\frac{0{,}21}{4}\right)^4 - 1\right]^2 \Rightarrow$$

$$FV = 5.500\left[\left(1+\frac{0{,}21}{4}\right)^{4}\right]^{2} \Rightarrow FV = 5.500 \times (1{,}0525)^{8} \Rightarrow$$

FV = 5.500 x 1,50583 $\Rightarrow$ FV = 8.282,08.

Portanto, o montante é R$ 8.282,08.

Observação 2.5 Para calcular o montante quando temos taxa nominal, devemos sempre utilizar a taxa efetiva equivalente, assim o montante será dado pela fórmula:

$FV = PV\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^{k \times n}$. Para resolver o exemplo acima, você tem:

$$FV = 5.500\left(1+\frac{0{,}21}{4}\right)^{4 \times 2} \Rightarrow FV = 5.500 \times (1{,}0525)^{8} \Rightarrow$$

FV = 5.500 × 1,50583 $\Rightarrow$ FV = 8.282,08.

Exemplo 2.20 Calcular o juro de uma aplicação de R$ 3.450,00 a 15,5% *aa* com capitalização mensal pelo prazo de dois anos e seis meses.

Resolução: dados do problema: PV = 3.450,00; i = 15,5% *aa* = 0,155 *aa* ; k = 12; n = 2,5 anos; J = ?

Aplicando a fórmula da taxa efetiva, você tem:

$$i_f = \left(1+\frac{0{,}155}{12}\right)^{12} - 1 \Rightarrow 1+i_f = \left(1+\frac{0{,}155}{12}\right)^{12}.$$

Agora, aplicando a fórmula do juro, temos:

$$J = PV\left[(1+i_f)^n - 1\right] \Rightarrow J = 3.450\left[\left(1+\frac{0{,}155}{12}\right)^{12\times 2{,}5} - 1\right] \Rightarrow$$

J = 3.450 [(1,0129)^{30} – 1] $\Rightarrow$ J = 3.450 x 0,4696 $\Rightarrow$ J = 1.620,26.

Portanto, o valor do juro da aplicação é R$ 1.620,26.

Observação 2.6 Para o cálculo do juro, pela observação 2.4, vem:

$J = PV\left[\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^{k\times n} - 1\right]$. Para resolver o exemplo acima, você tem:

$$J = 3.450\left[\left(1+\frac{0{,}155}{12}\right)^{12\times 2{,}5} - 1\right] = 3.450\left[(1{,}0129)^{30} - 1\right] =$$

3.450 × 0,4696 = 1.620,26.

Entendeu o que são taxa nominal e taxa efetiva? Certifique-se resolvendo as atividades propostas e, caso tenha dificuldades, retome a leitura dos conceitos e veja atentamente os exemplos apresentados.

Atividades de aprendizagem – 2

1) Calcular a taxa para 36 dias equivalente à taxa de 12% *at*.

2) Calcular a taxa para 48 dias equivalente à taxa de 30% *aa*.

3) Qual a taxa bimestral equivalente à taxa de 18,5% *at*.

4) Qual a taxa efetiva mensal, equivalente a taxa de 28% *aa*, com capitalização trimestral?

5) Qual a taxa efetiva semestral, equivalente a taxa de 18% *aa*, com capitalização semestral?

6) Uma aplicação de R$ 6.400,00 é resgatada por R$ 7.125,00 no prazo de 90 dias. Calcular a taxa anual ganha na operação.

7) Uma empresa toma emprestados R$ 25.000,00 para pagamento ao final de dois anos e seis meses. Se o banco cobra uma taxa de juros de 18,5% *aa*, com capitalização trimestral, qual será o montante devolvido?

8) Uma instituição financeira diz cobrar em suas operações um taxa de 90% *aa*, com capitalização bimestral. Nessas condições, determinar a taxa de juros efetiva anual que está sendo cobrada ao devedor.

9) Quanto devo aplicar hoje para obter um rendimento de R$ 2.400,00 após sete meses, a uma taxa de 18% aa, com capitalização trimestral?

Vamos estudar agora os descontos compostos. Todo o estudo realizado em descontos simples continua o mesmo para os descontos compostos, alterando apenas o regime de capitalização. Veja:

Descontos compostos

Antes de iniciarmos os estudos sobre descontos compostos, vamos relembrar alguns conceitos já estudados anteriormente (juros simples). Lembra?

Veja:

- **Valor Nominal de um Título** (N): é o valor do título na data de seu vencimento;
- **Valor Atual ou Valor Descontado de um Título** (V): é o valor que um título tem em uma data que antecede ao seu vencimento; e
- **Desconto**: é a quantia a ser abatida do valor nominal de um título ou a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

Sabe-se que $FV = PV(1+i)^n$; como PV é o valor presente ou valor atual (V) e FV é o valor futuro ou valor nominal (N), tem-se a seguinte fórmula:

$$N = V \times (1+i)^n \quad \Rightarrow \quad V = \frac{N}{(1+i)^n}.$$

Sabe-se que, quando a taxa apresentada é nominal, é preciso calcular a taxa efetiva equivalente, aplicando a fórmula abaixo:

$$i_f = \left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1, \text{ assim:}$$

$$N = V\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k \times n}.$$

Exemplo 2.21 Por quanto devo comprar hoje um título com vencimento daqui a cinco meses de valor nominal R$ 4.690,00, se a taxa de juros é de 1,75% *am*?

Resolução: dados do problema: $N = 4.690,00$; $i = 1,75\% = 0,0175$ *am*; $n = 5$ meses; $V = ?$

Aplicando a fórmula do valor atual acima, temos:

$$V = \frac{N}{(1+i)^n} = \frac{4.690}{(1+0,0175)^5} = 4.300,32$$

Portanto, o valor atual de título é R$ 4.300,32.

Exemplo 2.22 Determinar o valor nominal de um título com vencimento daqui a dois anos, sabendo-se que seu valor atual é R$ 5.900,00 e a taxa é de 26% *aa* com capitalização trimestral.

Resolução: dados do problema: $i = 26\% = 0,26$ *aa*; $n = 2$ anos; $V = 5.900,00$; $k = 4$ e $N = ?$

Aplicando diretamente a fórmula $N = V\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\times n}$, você tem:

$$N = 5.900\left(1+\frac{0,26}{4}\right)^{4\times 2} = 9.764,47.$$

Portanto, o valor nominal de título é R$ 9.764,47.

Desconto racional ou desconto por dentro (d_r)

Desconto racional ou desconto por dentro é a diferença entre o valor nominal e o valor atual de um título descontado n períodos antes de seu vencimento, ou seja, $d_r = N - V_r$.

Sabemos que $N = V \times (1 + i)^n \Rightarrow V_r = V = \frac{N}{(1+i)^n}$

é a fórmula para calcular o **valor atual racional**.

Agora,

$$d_r = N - V_r = N - \frac{N}{(1+i)^n} = N \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

Logo, o **desconto racional composto** é dado por:

$$d_r = N \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

Já se sabe que, se a taxa dada é nominal, é preciso calcular a efetiva equivalente e o desconto racional composto, que é dado por:

$$d_r = N\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\times n}}\right].$$

Exemplo 2.23 Calcular o desconto por dentro de um título de valor nominal R$ 5.480,00 descontado cinco meses antes de seu vencimento à taxa de 4,75% *am*.

Resolução: dados do problema: N = 5.480,00; i = 4,75% = 0,0475 *am*; n = 5 meses; d_r = ?

Aplicando a fórmula $d_r = N \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$, você tem,:

$$d_r = 5.480\left[1 - \frac{1}{(1+0,0475)^5}\right] = 5.480\left[1 - \frac{1}{1,26116}\right] =$$

5.480 [1 – 0,79292] = 1.134,79.

Agora, para calcular o valor atual racional, por definição, temos:

$V_r = N - d_r$ = 5.480,00 – 1.134,21 = 4.345,21.

Portanto, o desconto por dentro do título é R$ 1.134,79, e o valor atual racional é R$ 4.345,21.

Exemplo 2.24 Calcular o desconto racional de um título de valor nominal R$ 7.500,00, resgatado dois anos antes de seu vencimento, à taxa de 25% *aa* com capitalização trimestral.

Resolução: dados do problema: i = 25% = 0,25 *aa*; n = 2 anos; k = 4; N = 7.500,00; d_r = ?

Aplicando diretamente a fórmula $d_r = N\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k\times n}}\right]$, temos:

$$d_r = 7.500\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,25}{4}\right)^{4\times 2}}\right] = 7.500\left[1 - \frac{1}{(1,0625)^8}\right] =$$

$$d_r = 7.500\left[1 - \frac{1}{1,62417}\right] = 7.500\left[1 - 0,61570\right] = 2.882,26$$

Portanto, o valor do desconto racional é R$ 2.882,26.

Exemplo 2.25 Uma empresa obtém um empréstimo para ser liquidado ao final de 12 meses, em pagamento único de R$ 8.500,00 à taxa de desconto por dentro de 4,5% *am*. Decorridos exatamente cinco meses, a empresa resolve liquidar esse empréstimo. Calcular o valor líquido a ser pago pela empresa.

Resolução: dados do problema: N = 8.500,00; i = 4,5% = 0,045 *am*; n = 7 meses; V_r = ?

Aplicando a fórmula $V_r = V = \dfrac{N}{(1+i)^n}$, você tem:

$$V_r = \frac{8.500}{(1+0,045)^7} = \frac{8.500}{(1,045)^7} = \frac{8.500}{1,36086} = 6.246,04.$$

Portanto, o valor líquido a ser pago pela empresa é R$ 6.246,04.

Exemplo 2.26 O valor nominal de um título é R$ 6.500,00, e o desconto racional obtido pelo cliente foi de R$ 835,63. Determinar o prazo de antecipação, se a taxa de desconto é 3,5% *am*.

Resolução: dados do problema: i = 3,5% = 0,35 *am*; N = 6.500,00; d_r = 835,63; n = ?

Sabemos que o valor atual é $V_r = N - d_r$ = 6.500 – 835,63 = 5.664,37, assim:

$$V_r = \frac{N}{(1+i)^n} \Rightarrow 5.664,37 = \frac{6.500}{(1,035)^n} \Rightarrow (1,035)^n = \frac{6.500}{5.664,37} = 1,14752.$$

$$\ln(1,035)^n = \ln(1,14752) \Rightarrow n\ln(1,035) = \ln(1,14752) \Rightarrow n = \frac{\ln(1,14752)}{\ln(1,035)} = 4$$

Portanto, o prazo de antecipação do título é quatro meses.

Desconto comercial ou desconto por fora

O valor atual comercial ou o **valor descontado comercial** (V_C) é dado pela fórmula:

$V_C = N \times (1 - i)^n.$

Assim,

$d_C = N - V_C = N - N$ x $(1 - i)^n = N \times [1 - (1 - i)^n]$.

Logo, o **desconto comercial ou desconto por fora composto** é dado por:

$d_C = N \times [1 - (1 - i)^n]$.

Exemplo 2.27 Certo cliente descontou um título, de valor nominal R$ 6.700,00, sete meses antes de seu vencimento a uma taxa de desconto comercial de 3,5% *am*; calcular o valor do desconto por fora e o valor recebido pelo cliente.

Resolução: dados do problema: N = 6.700,00; n = 7 meses; i = 3,5% = 0,035 *am*; d_C = ? e V_C = ?

Aplicando diretamente a fórmula $d_C = N$ x $[1 - (1 - i)^n]$, você tem:

$d_C = 6.700\ [1 - (1 - 0{,}035)^7] = 6.700[1 - (0{,}965)^7] =$

$6.700[1 - 0{,}77928] = 1.478{,}85$.

Agora,

$V_C = N - d_C = 6.700 - 1.478{,}85 = 5.221{,}15$.

Portanto, o valor do desconto por fora é R$ 1.478,85, e o valor recebido pelo cliente é R$ 5.221,15.

Exemplo 2.28 Um título de valor nominal R$ 6.500,00 foi descontado oito meses ante de seu vencimento, e o valor líquido recebido pelo seu portador é R$ 4.980,00; calcular a taxa mensal de desconto comercial.

Resolução: dados do problema: N = 6.500,00; V_C = 4.980,00; n = 8; i = ?

Aplicando a fórmula $V_C = N \times (1 - i)^n$, temos:

$$4.980 = 6.500\ (1 - i)^8 \Rightarrow (1-i)^8 = \frac{4.980}{6.500} = 0{,}76615 \Rightarrow$$

$$\left((1-i)^8\right)^{\frac{1}{8}} = (0{,}76615)^{\frac{1}{8}} \Rightarrow 1-i = 0{,}96725 \Rightarrow$$

$i = 1 - 0{,}96725 = 0{,}03275 = 3{,}275\%$

Portanto, a taxa de desconto comercial é 3,275% *am*.

Exemplo 2.29 Certo título de valor nominal R$ 3.500,00 foi descontado antes de seu vencimento por R$ 2.879,3557 à taxa de desconto comercial de 2,75% *am*. Determine o prazo de antecipação.

Resolução: dados do problema: $N = 3.500,00$; $V_C = 2.879,3557$; $i = 2,75\% = 0,0275$ *am* e $n = ?$

Aplicando a fórmula $V_C = N \times (1 - i)^n$, você tem:

$$2.879,3557 = 3.500\,(1 - 0,0275)^n \Rightarrow (0,9725)^n = \frac{2.879,3557}{3.500} = 0,82267 \Rightarrow$$

$$\ln(0,9725)^n = \ln(0,82267) \Rightarrow n\ln(0,9725) = \ln(0,82267) \Rightarrow$$

$$n = \frac{\ln(0,82267)}{\ln(0,9725)} = 7$$

Portanto, o prazo de antecipação é de sete meses.

Taxa efetiva (i_f)

A taxa efetiva cobrada na operação de desconto comercial composto depende apenas da taxa de desconto (i) utilizada e é dada pela fórmula:

$$i_f = \frac{i}{1 - i}.$$

Exemplo 2.30 A taxa de desconto comercial composto utilizada pelo Banco Alvorada é de 24,75% *aa*. Calcular a taxa efetiva anual utilizada pelo Banco Alvorada.

Resolução: dados do problema: $i = 24,75\% = 0,2475$ *am* e $i_f = ?$

Aplicando a fórmula acima, temos:

$$i_f = \frac{i}{1 - i} = \frac{0,2475}{1 - 0,2475} = 0,3289 = 32,89\%.$$

Portanto, a taxa efetiva do Banco Alvorada é 32,89% *aa*.

Exemplo 2.31 A taxa efetiva utilizada para descontar comercialmente um título é 34,55% *aa*. Determinar a taxa de desconto comercial anual.

Resolução: aqui, $i_f = 34,55\% = 0,3455$ *aa*; e queremos calcular a taxa de desconto comercial anual. Aplicando a fórmula $i_f = \frac{i}{1 - i}$, vem:

$0,3455 = \dfrac{i}{1-i} \Rightarrow 0,3455\ (1 - i) = i \Rightarrow 0,3455 - 0,3455i = i \Rightarrow$

$0,3455 = 0,3455i + i \Rightarrow i = \dfrac{0,3455}{1,3455} = 0,2567 = 25,67\%.$

Portanto, a taxa de desconto comercial é 25,67% *aa*.

Exemplo 2.32 Um título foi descontado à taxa de 4,5% *am* sete meses antes de seu vencimento. O desconto comercial composto é R$ 4.780,98. Calcular o valor nominal do título, o valor atual e a taxa efetiva mensal.

Resolução: dados do problema: d_C = 4.780,98; n = 7 meses; i = 4,5% = 0,045 *am*; N = ?; V_C = ? e i_f = ?

Aplicando a fórmula $d_C = N \times [1 - (1 - i)^n]$, você calcula o valor nominal do título; assim:

$4.780,98 = N[1 - (1 - 0,045)^7] \Rightarrow N = \dfrac{4.780,98}{1 - (1 - 0,045)^7} = \dfrac{4.780,98}{1 - (0,955)^7} =$

$N = \dfrac{4.780,98}{1 - 0,72448} = \dfrac{4.780,98}{0,27552} = 17.352,28.$

Agora, $V_C = N - d_C$ = 17.352,28 – 4.780,98 = 12.571,30, e

$i_f = \dfrac{0,045}{1 - 0,045} = 0,0471 = 4,71\%$ *am*.

Portanto, o valor nominal do título é R$ 17.352,28, o valor atual do título é R$ 12.571,30, e a taxa efetiva mensal é 4,71%.

Verifique se você está entendendo o conteúdo resolvendo as atividades propostas.

Atividades de aprendizagem – 3

1) Calcular o valor atual de um título de valor nominal igual a R$ 7.500,00, com 150 dias a vencer, sabendo-se que a taxa de desconto racional é de 5,75% *am*.

2) Sabendo-se que o valor líquido creditado na conta de um cliente foi de R$ 5.490,00 correspondente ao desconto racional de um título de R$ 9.000,00 à taxa de 24% *aa*, determinar o prazo a decorrer até o vencimento desse título.

3) Calcular o desconto racional concedido a um título de valor de resgate igual a R$ 4.000,00, sabendo-se que faltam 120 dias para o seu vencimento e que a taxa de desconto é de 18% *aa*. Determine também o valor atual desse título.

4) Numa operação de desconto comercial de um título, o valor creditado na conta do cliente foi de R$ 13.980,00, e o seu valor na data de vencimento seria de R$ 15.850,00. Considerando-se que o prazo de antecipação foi de nove meses, calcular a taxa anual de desconto e a taxa efetiva anual.

5) Calcular o valor do desconto comercial, o valor liberado e a taxa efetiva anual aplicada no desconto de um duplicata com valor de resgate de R$ 15.000,00, prazo de 75 dias e uma taxa de desconto de 28% *aa*.

6) Calcular o valor nominal de um título que, resgatado um ano e seis meses antes de seu vencimento, sofreu um desconto racional de R$ 4.950,00, a uma taxa de 18,5% *aa*, com capitalização semestral.

7) Calcular a taxa anual de desconto racional adotada no resgate de um título de valor nominal igual a R$ 8.000,00, desconto de R$ 1.450,00 e antecipação de um ano, sabendo-se que os juros são capitalizados trimestralmente.

8) Calcular o valor líquido de um título de valor nominal de R$ 8.500,00, resgatado seis meses antes de seu vencimento, a uma taxa de desconto racional de 18% *aa*, com capitalização trimestral.

9) Uma pessoa propõe-se a pagar R$ 4.950,00 ao portador de uma nota promissória com vencimento daqui a quatro meses. Sabendo-se que o negócio está sendo realizado a uma taxa de desconto racional de 20% *aa*, qual o valor de emissão da nota promissória?

10) O portador de uma nota promissória com valor nominal de R$ 4.250,00 resgatou-a a uma taxa de desconto racional de 2% *am*, tendo um desconto de R$ 245,13. Esta operação foi realizada a quantos dias do vencimento do título?

Equivalência de capitais

O conceito de equivalência de capitais permite transformar formas de pagamento (ou recebimento) em outras equivalentes, e isso ocorre quando queremos substituir um título por vários. Pode-se também ter vários títulos com vencimentos em datas diferentes, quando queremos substituí-los por um único título.

Isto nos motiva às seguintes definições:

- **data focal ou data de referência**: é a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a diferentes datas;
- **equação de valor**: é a equação que permite que sejam igualados capitais diferentes, referidos a datas diferentes, em uma mesma data focal; e
- **capitais equivalentes**: dois ou mais capitais nominais, supostos com datas de vencimento determinadas, dizem-se equivalentes quando, descontados para uma mesma data focal, à mesma taxa de juros e em idênticas condições, produzirem valores iguais.

Observação 2.6 Na equivalência de capitais, vamos trabalhar sob o critério do desconto racional composto, utilizando a fórmula $N = V_r(1 + i)^n$ (no processo de capitalização de título) e a fórmula $V_r = \dfrac{N}{(1+i)^n}$ (no processo de descapitalização de título). Quando trabalhamos com taxa nominal, empregamos a fórmula:

$$N = V_r\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k\times n}.$$

Observação 2.7 Dois ou mais capitais, equivalentes sob o critério do desconto racional composto em determinada data focal, são equivalentes em qualquer data focal.

Para uma melhor compreensão de equivalência de capitais, apresentamos agora alguns exemplos.

Exemplo 2.33 Três títulos, um para doze meses, no valor de R$ 8.000,00, outro para quinze meses, no valor de R$ 12.000,00, e outro para vinte e quatro meses, no valor de R$ 15.000,00, foram substituídos por dois outros, sendo o primeiro de R$ 10.000,00 para nove meses, e o segundo, para um ano e meio. Sabendo-se que a taxa de desconto racional adotada é de 4,5% *am*, qual será o valor do título para um ano e meio? (Escolher data focal 18).

Resolução: Para data focal 18, veja a Figura 3:
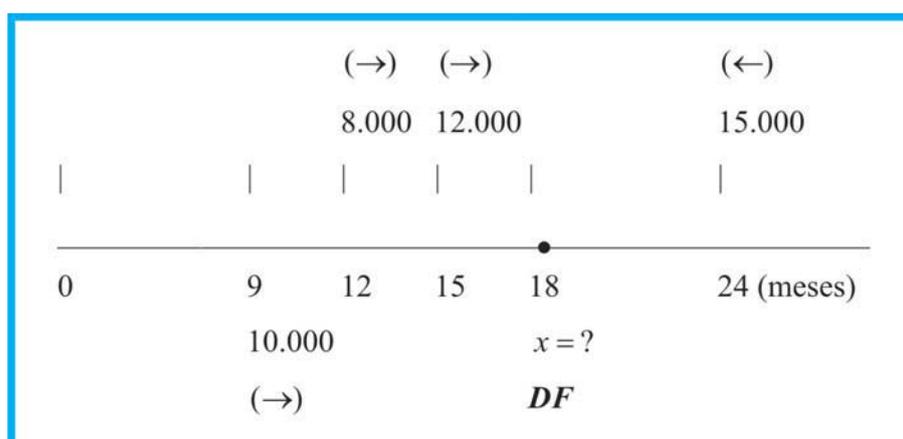
Figura 3

Tem-se a seguinte equação de valor, comparando todos os capitais na data focal 18 meses, e seja o valor do título na data 18, assim:

$$8.000\times(1,045)^{6}+12.000\times(1,045)^{3}+\frac{15.000}{(1,045)^{6}}=10.000\times(1,045)^{9}+x.$$

Simplificando a equação de valor acima, tem-se $x = 20.769,56$.

Logo, o valor do título para 18 meses é R$ 20.769,56.

Portanto, os capitais de R$ 8.000,00 para 12 meses, R$ 12.000,00 para 15 meses e R$ 15.000,00 para 24 meses são equivalentes aos capitais R$ 10.000,00 para nove meses e R$ 20.769,56 para 18 meses, à taxa de 4,5% *am*, pelo critério do desconto racional, em qualquer data focal escolhida.

Escolhendo a data focal 12 meses, você tem a seguinte equação de valor:

$$8.000+\frac{12.000}{(1,045)^{3}}+\frac{15.000}{(1,045)^{12}}=10.000\times(1,045)^{3}+\frac{x}{(1,045)^{6}}.$$

Simplificando a equação acima, você obtém $x = 20.769,56$.

Agora, se escolher a data focal 0, tem a equação de valor abaixo:

$$\frac{8.000}{(1,045)^{12}}+\frac{12.000}{(1,045)^{15}}+\frac{15.000}{(1,045)^{24}}=\frac{10.000}{(1,045)^{9}}+\frac{x}{(1,045)^{18}}.$$

Simplificando, tem-se $x = 20.769,56$.

portanto, o valor do título para 18 meses é de R$ 20.769,56.

Exemplo 2.34 A empresa Salutar, devedora de um título no valor de R$ 45.000,00 para quatro anos, deseja resgatar essa dívida em três pagamentos anuais iguais: o primeiro, ao final de um ano, o segundo, ao final de três anos, e o último pagamento, ao final de quatro anos. Se a taxa de juros da operação é de 36,5% *aa* com capitalização trimestral, calcular o valor desses pagamentos.

Figura 4

Resolução: Aqui $k = 4$, $i = 36{,}5\% = 0{,}365$ *aa*, veja a Figura 4:

Considerando data focal quatro anos, você tem a seguinte equação de valor:

$$45.000 = x\left(1+\frac{0,365}{4}\right)^{4\times3} + x\left(1+\frac{0,365}{4}\right)^{4\times1} + x \Rightarrow$$

$$45.000 = x\left[\left(1+\frac{0,365}{4}\right)^{12} + \left(1+\frac{0,365}{4}\right)^{4} + 1\right] \Rightarrow$$

$$x = \frac{45.000}{\left[(1,09125)^{12} + (1,09125)^{4} + 1\right]} \Rightarrow x = 8.539,41.$$

Portanto, o valor de cada pagamento é R$ 8.539,41.

Exemplo 2.35 A loja Facilita Tudo vende um eletrodoméstico em quatro prestações mensais, iguais e sucessivas no valor de R$ 145,00, vencendo a primeira prestação daqui a 30 dias. Se a taxa de juros da loja é de 3,5% *am*, calcular o preço à vista desse eletrodoméstico.

Resolução: Aqui, $i = 3{,}5\%$ *am*, veja a Figura 5:

$PV = ?$	145	145	145	145
0	1	2	3	4 (meses)
DF	(←)	(←)	(←)	(←)

Figura 5

Considerando data focal zero, você tem a seguinte equação de valor:

$$PV = \frac{145}{(1{,}035)^1} + \frac{145}{(1{,}035)^2} + \frac{145}{(1{,}035)^3} + \frac{145}{(1{,}035)^4} = 532{,}60.$$

Portanto, o preço à vista do eletrodoméstico é R$ 532,60.

Resolva as atividades propostas e certifique-se que entendeu o conteúdo.

Atividades de aprendizagem – 4

1) Uma instituição financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em um ano, no valor de R$ 12.000,00, e o segundo em um ano e meio, valor de R$ 15.000,00. O cliente aceita a oferta assinando uma nota promissória, com vencimento para oito meses. Sabendo-se que a taxa de desconto racional da operação é de 28% *aa*, calcular o valor da nota promissória em seu vencimento.

2) Certa pessoa deve dois títulos: o primeiro, de R$ 18.000,00, com vencimento para um ano, e o segundo, de R$ 25.000,00 com vencimento para três anos. Por problemas financeiros, pretende pagar esses dois compromissos de uma só vez, mas somente daqui a quatro anos. Adotando-se a taxa de desconto racional de 18% *aa*, com capitalização semestral, calcular o valor do novo título.

3) Qual a taxa de juros (anual) utilizada na substituição de um título de R$ 40.000,00, vencível daqui a dois anos, por outro de R$ 57.600,00, com vencimento para daqui a quatro anos? (Desconto racional)

4) Determinar o valor de dois títulos, um com vencimento em seis meses, e outro, em nove meses, de mesmo valor, que, a uma taxa de 6% ao trimestre, com capitalização mensal, substituem um terceiro de valor nominal de R$ 25.000,00, cujo vencimento está marcado para daqui a um ano.

5) Após quantos dias devo pagar um título de R$ 8.000,00, que substitui outro de R$ 6.010,52, com vencimento para dois meses, se a taxa de desconto racional é de 10% *am*?

6) Uma dívida de R$ 14.000,00, com vencimento em dez meses, é substituída por uma parcela de R$ 3.000,00, com vencimento para dois meses, outra de R$ 6.500,00, com vencimento para cinco meses, e uma terceira a ser paga na data do vencimento da dívida original. Calcular o valor da terceira parcela, sabendo-se que a taxa de desconto racional é de 24% *aa*.

7) Antônio José tem as seguintes obrigações financeiras com José Antônio:

- dívida de R$ 2.000,00 vencível ao final de um mês;
- dívida de R$ 3.400,00 vencível ao final de cinco meses; e
- dívida de R$ 5.000,00 vencível ao final de dez meses.

Prevendo dificuldades no pagamento destes compromissos, Antônio José propõe substituir este plano original por dois pagamentos iguais, vencendo o primeiro de hoje a 12 meses, e o segundo, ao final de 15 meses. Determinar o valor desses pagamentos para uma taxa de desconto racional de 25% *aa*.

8) Uma dívida de R$ 14.900,00 vence daqui a 18 meses; entretanto, o devedor propõe parcelar a dívida pagando quatro parcelas semestrais iguais, vencendo a primeira de hoje a seis meses. Calcular o valor das parcelas, considerando-se uma taxa de desconto racional de 18% *aa*, com capitalização semestral.

9) Suponha que uma pessoa vai necessitar de R$ 6.700,00 de hoje a nove meses e de R$ 9.500,00 de hoje a 17 meses. Quanto deverá esta pessoa depositar hoje numa instituição financeira que oferece uma taxa de 24% *aa*, com capitalização mensal?

10) Na venda de um equipamento, a loja Felicidade oferece duas alternativas a seus clientes:

Alt. 1) R$ 5.000,00 de entrada, mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de R$ 7.000,00, e a segunda, de R$ 10.000,00;

Alt. 2) sem entrada, sendo o pagamento efetuado em quatro parcelas trimestrais: R$ 4.500,00 nas duas primeiras e R$ 6.000,00 nas duas últimas. Qual a melhor alternativa para o comprador, se considerarmos a taxa de juros de mercado de 5,5% *am*?

Saiba mais...

- Sobre os conceitos estudados nesta Unidade, consulte:

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática Financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

GUERRA, Fernando. *Matemática Financeira através da HP 12-C*. 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2006.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. *Matemática Financeira*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática Financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

RESUMO

Nesta Unidade, você estudou a capitalização composta e o cálculo de montante, e taxa de juros e do montante de uma operação financeira no regime de capitalização composta.

Você aprendeu também as operações de desconto composto (comercial e racional) de um título, como calcular a taxa efetiva de desconto comercial composto e, finalmente, estudou equivalência de capitais no regime de juros compostos.

Respostas das atividades de aprendizagem

Atividades de aprendizagem 1

1) R$ 10.881,92.
2) 10 meses.
3) Convenção linear = R$ 7.270,67;
Convenção exponencial = R$ 7.260,34.
4) $n \cong$ 4 anos 9 meses e 27 dias.
5) R$ 7.123,82.
6) 1,02% *am*.
7) 18 meses.

Atividades de aprendizagem 2

1) 4,64% para os 36 dias.
2) 3,56% para os 48 dias.
3) 11,98% *ab*.
4) 2,28% *am*.
5) 9% *as*.
6) 53,61% *aa*.
7) R$ 39.291,15.
8) 131,30% *aa*.
9) R$ 22.188,19.

Atividades de aprendizagem 3

1) R$ 5.671,00.
2) n $\cong$ 2 anos 3 meses e 17 dias.
3) V_r = R$ 3.785,29; d_r = R$ 214,71.
4) i = 15,41% *aa* e i_f = 18,22% *aa*.

5) d_c = R$ 992,23; V_c = R$ 14.007,77 e i_f = 38,89% *aa*.

6) R$ 21.235,02.
7) 20,51% *aa*.

8) R$ 7.783,70.
9) R$ 5.260,16.

10) 90 dias.

Atividades de aprendizagem 4

1) R$ 23.263,05.
2) R$ 59.890,30.

3) 20% *aa*.
4) R$ 11.429,25.

5) 150 dias.
6) R$ 3.427,90.

7) R$ 5.918,60.
8) R$ 3.551,40.

9) R$ 12.390,80.

10) Como o valor presente da Alt. 2 é R$13.957,53 e o valor presente da Alt. 1 é R$15.336,53, conclui-se que a alternativa 2 é melhor para o comprador.

Caro estudante!

Abordamos até aqui assuntos gerais relacionados com a Matemática Financeira, tais como descontos, juros, montante, taxas nominal e efetiva, equivalência de capitais, entre outros. O entendimento destes conceitos é importante, por exemplo, no momento em que você deseja aplicar recursos financeiros, quando é necessário conhecer termos como: juros, descontos, montante, entre outros, termos estes aprendidos nas Unidades 1 e 2. Nas próximas Unidades, vamos abordar temas mais específicos, quando o aprendizado dos conceitos já vistos é primordial para que você possa dar continuidade nos estudos.